Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1 **Semestre 2**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (15 min, 3 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène dont on connaît les deux dérivées partielles :

$$f'_x(x,y) = 2xy \qquad f'_y(x,y) = x^2 + 3y^2$$

1) Pour $\lambda > 0$, on a

$$f'_x(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)(\lambda y) = 2\lambda^2 xy = \lambda^2 f'_x(x,y)$$
$$f'_y(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 3(\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 y^2 = \lambda^2(x^2+3y^2) = \lambda^2 f'_y(x,y)$$

On en déduit que les deux dérivées partielles sont homogènes de degré 2. La fonction f est donc homogène de degré $2+1=3$.

2) D'après le théorème d'Euler, on a

$$3f(x,y) = xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = x(2xy) + y(x^2+3y^2) = 2x^2y + x^2y + 3y^3 \implies f(x,y) = x^2y + y^3$$

Exercice II (35 min, 5 points)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+2x} - \frac{1}{1-2x}$$

1) La fonction $f(x,y)$ est définie lorsque $1+2x \neq 0$ et $1-2x \neq 0$, soit $x \neq -1/2$ et $x \neq 1/2$. D'où $D_f =]-\infty, -1/2[\cup]-1/2, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$.

2) On a $f(0) = 1 - 1 = 0$.

3) Le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 est

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

4) On déduit du développement limité précédent :

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - (2x) + (2x)^2 - (2x)^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1 - (-2x) + (-2x)^2 - (-2x)^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

Le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 est donc

$$f(x) = (1 - 2x + 4x^2 - 8x^3) - (1 + 2x + 4x^2 + 8x^3) + x^3\varepsilon(x) = -4x - 16x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

5) Faire une étude locale de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = 0$:

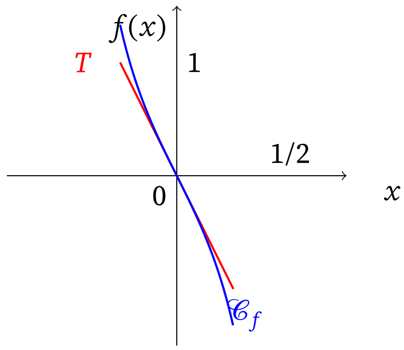
a) L'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en $x = 0$ correspond à la partie affine du developpement limité de f, soit $y = -4x$.

b) On a alors

$$f(x) - [-4x] = -16x^3 + x^3\varepsilon(x) \approx -16x^3 \quad \begin{cases} \geqslant 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \leqslant 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de la tangente T lorsque x est négatif et au-dessous lorsque x est positif.

c) La représentation de $f(x)$ au voisinage de 0 est donc



Exercice III (25 min, 4 points)

La première intégrale est de la forme $6u'u^5 = (u^6)'$. D'où

$$I = \int_0^1 6x(x^2+1)^5 \,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}(x^2+1)^6\right]_0^1 = \frac{63}{2}$$

Pour la seconde intégrale, on effectue un intégration par partie en posant $u = x$ et $v' = 2\mathrm{e}^{2x}$:

$$J = \int_0^1 2x\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 - \left[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2+1}{2}$$

Pour la dernière, on pose $t = \sqrt{x-2}$ d'où $x = t^2 + 2$ et $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$:

$$K = \int_3^6 \frac{x}{\sqrt{x-2}} \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2+2}{t} \times 2t \,\mathrm{d}t = \int_1^2 2t^2 + 4 \,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}t^3 + 4t\right]_1^2 = \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3}$$

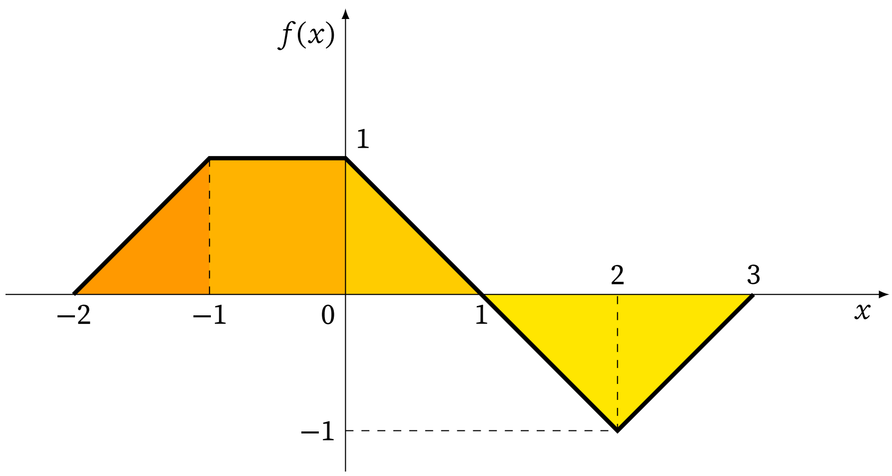
Exercice IV (10 min, 2 points)

L'intégrale

$$I = \int_{-2}^3 f(x) \,\mathrm{d}x$$

correspond à l'aire algébrique comprise entre la droite des x et la courbe. D'où

$$I = \frac{1\times 1}{2} + 1\times 1 + \frac{1\times 1}{2} - \frac{2\times 1}{2} = 1$$



Exercice V (25 min, 4 points)
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Comme $\det A = 12 \neq 0$, la matrice A est inversible.

2) On a

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 14 & 10 & -10 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 10 & -10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -6I_3$$

3) On en déduit l'inverse de A :

$$A^2 - 5A = -6I_3 \implies A(A - 5I_3) = -6I_3 \implies A\left(\frac{A - 5I_3}{-6}\right) = I_3 \implies A^{-1} = \frac{A - 5I_3}{-6} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

4) Retrouver l'inverse de A en utilisant une méthode directe.