

Licence Économie-Gestion – 1^{re} année

Matière : Mathématiques appliquées
Enseignant : Vincent Jalby

Durée : 2 heures

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (10 min, 2 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

- 1) Rappeler la définition de l'élasticité $Ef(x_0)$ de f en x_0 .
- 2) L'interpréter lorsque $Ef(x_0) > 1$?

Exercice I (15 min, 3 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène dont on connaît les deux dérivées partielles :

$$f'_x(x, y) = 2xy \quad f'_y(x, y) = x^2 + 3y^2$$

- 1) Vérifier que les deux dérivées partielles de f sont homogènes et déterminer leur degré.
- 2) En utilisant le théorème d'Euler, trouver l'expression de $f(x, y)$.

Exercice II (35 min, 5 points)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+2x} - \frac{1}{1-2x}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Calculer $f(0)$.
- 3) Rappeler le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- 4) Calculer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0
- 5) Faire une étude locale de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = 0$:
 - a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f en $x = 0$.
 - b) Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à T .
 - c) Faire une représentation graphique de \mathcal{C}_f et T au voisinage de $x = 0$.

Exercice III (25 min, 4 points)

Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^1 6x(x^2 + 1)^5 dx \quad J = \int_0^1 2xe^{2x} dx$$

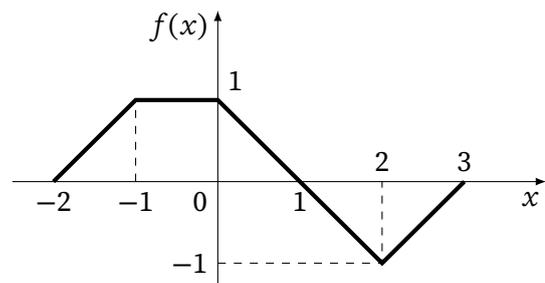
$$K = \int_3^6 \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx \quad \text{en posant } t = \sqrt{x-2}$$

Exercice IV (10 min, 2 points)

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-2}^3 f(x) dx$$

où f est la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous.



Vous devez expliquer et justifier votre calcul !

Exercice V (25 min, 4 points)

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Vérifier que la matrice A est inversible.
- 2) Calculer $A^2 - 5A$
- 3) En déduire l'inverse de A .
- 4) Retrouver l'inverse de A en utilisant une méthode directe.