Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1 **Semestre 1**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère la fonction $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$.

1) On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty$$

2) Les dérivées première et seconde de $f(x)$ sont

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \qquad f''(x) = 12x^2 - 24x$$

3) La condition nécessaire d'optimalité (CNO) donne :

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 12x^2 = 0 \iff 4x^2(x-3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3$$

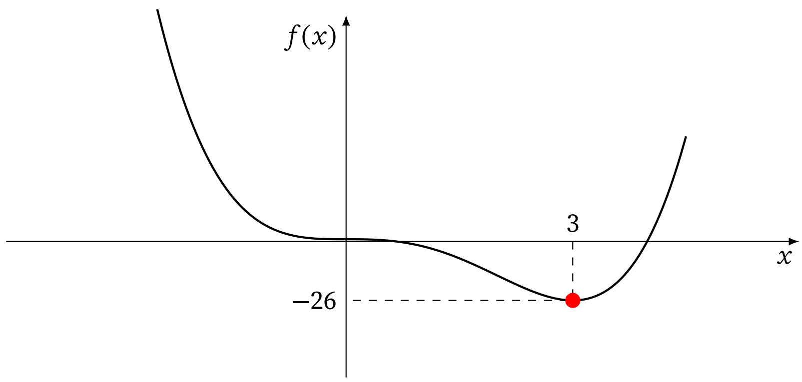
La fonction f admet donc deux points critiques : $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Pour déterminer la nature des points critiques, on utilise les conditions suffisantes d'optimalité (CSO) :

$$f''(x_1) = 0 \implies \text{on ne peut pas conclure} \qquad f''(x_2) = 36 > 0 \implies \text{minimum local}$$

La fonction f admet donc un minimum local en $x_2 = 3$. On ne peut pas déterminer la nature du point critique $x_1 = 0$ à l'aide des CSO.

4) Le tableau de variation de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-26	$\nearrow$	$+\infty$



5) On voit sur le tableau de variations et sur le graphique que f admet un minimum **global** en $x = 3$ et n'admet pas d'extremum (point d'inflexion) en $x = 0$.

Exercice II (20 min, 4 points)

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = \dfrac{2\sqrt{x}}{y}$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

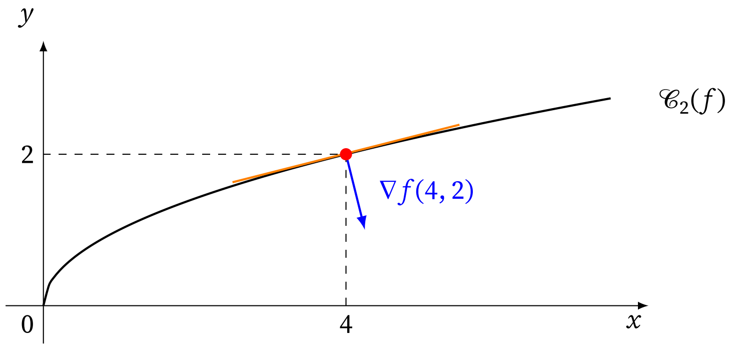
1) Les dérivées partielles (premières) de f et le gradient de f au point $(4,2)$ sont

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}} \qquad f'_y(x,y) = \frac{-2\sqrt{x}}{y^2} \implies \nabla f(4,2) = \begin{pmatrix} f'_x(4,2) \\ f'_y(4,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) La courbe de niveau 2 de f est donnée par

$$f(x,y) = 2 \iff \frac{2\sqrt{x}}{y} = 2 \iff y = \sqrt{x}$$

3)



Exercice III (55 min, 8 points)
Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 8y$.

1) Etude de la convexité de f

a) Les dérivées partielles premières et secondes de f sont

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) = 4x - 2y &\implies f''_{x^2}(x,y) = 4 \qquad f''_{xy}(x,y) = -2 \\ f'_y(x,y) = 2y - 2x + 8 &\implies f''_{yx}(x,y) = -2 \qquad f''_{y^2}(x,y) = 2 \end{aligned}$$

b) On en déduit la hessienne et calculer le hessien de f :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \implies \det H_f(x,y) = 8 - 4 = 4$$

c) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\det H_f(x,y) = 4 \geqslant 0$, $f''_{x^2}(x,y) = 4 \geqslant 0$ et $f''_{y^2}(x,y) = 2 \geqslant 0$. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) Optimisation sans contrainte

a) Les CNO donnent

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2y - 2x + 8 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - x + 4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x \\ x = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -8 \\ x = -4 \end{cases}$$

La fonction f admet donc un unique point critique $(x_0, y_0) = (-4, -8)$.

b) Comme la fonction f est convexe, elle admet donc un minimum global en $(x_0, y_0) = (-4, -8)$.

3) Optimisation avec contrainte : on souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Optimiser } f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 8y \\ \text{sous la contrainte } y - x = 6 \end{cases}$$

a) Le lagrangien associé à (P) est

$$L(x,y,\lambda) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 8y + \lambda(y - x - 6)$$

Les CNO sont

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x - 2y - \lambda = 0 \\ 2y - 2x + 8 + \lambda = 0 \\ y - x - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 8 = 0 \\ 2y - 2x + 8 + \lambda = 0 \\ y - x - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4 \\ \lambda = -20 \\ y = 2 \end{cases}$$

Le problème (P) admet donc un unique point critique $(x_0, y_0) = (-4, 2)$ avec $\lambda_0 = -20$.

b) Comme la fonction f est convexe et la contrainte affine, on en déduit que le problème (P) admet un minimum global en $(x_0, y_0) = (-4, 2)$.