

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1

Semestre 1

Licence Économie-Gestion – 1^{re} année

Matière : Mathématiques appliquées

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non-graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (15 min, 3 points)

- 1) Rappeler la définition d'un sous-ensemble convexe C de \mathbb{R}^2 .
- 2) Expliquer la définition à l'aide d'un dessin.
- 3) Donner un exemple d'un ensemble convexe et d'un ensemble non-convexe sous forme de dessin.

Exercice I (30 min, 5 points)

On considère la fonction $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$.

- 1) Déterminer les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- 2) Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.
- 3) Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$.
- 4) Construire le tableau de variation de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f en y précisant le(s) extremum(s).
- 5) Le(s) extremum(s) de f sont-ils globaux ?

Exercice II (20 min, 4 points)

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = \frac{2\sqrt{x}}{y}$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

- 1) Calculer les dérivées partielles (premières) de f . En déduire le gradient de f au point $(4, 2)$.
- 2) Déterminer la courbe de niveau 2 de f . En faire une représentation graphique.
- 3) Représenter le gradient de f en $(4, 2)$ sur le graphique précédent.

Exercice III (55 min, 8 points)

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 8y$.

- 1) **Etude de la convexité de f**
 - a) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f .
 - b) Former la hessienne et calculer le hessien de f .
 - c) En déduire que f est convexe sur \mathbb{R}^2 .
- 2) **Optimisation sans contrainte**
 - a) Déterminer le(s) extremum(s) de f sur \mathbb{R}^2 .
 - b) Préciser la nature du ou des extremums (minimum ou maximum, local ou global).
- 3) **Optimisation avec contrainte** : on souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 8y \\ \text{sous la contrainte } y - x = 6 \end{cases}$$

- a) Donner le lagrangien associé à (P) et déterminer le(s) point(s) critique(s).
- b) Préciser la nature du ou des extremums (minimum ou maximum, local ou global).