Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1 **Semestre 2**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de corrections **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (15 min, 3 points)
Soit $f(x) = e^{x^2}$.

1) La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = (x^2)' \, e^{x^2} = 2x \, e^{x^2}$.

2) L'élasticité de $f(x)$ en $x \in \mathbb{R}$ est

$$e(f, x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} = x \frac{2x \, e^{x^2}}{e^{x^2}} = 2x^2$$

3) En $x_0 = 1/2$, $e(f, 1/2) = 1/2 < 1$. La fonction f est donc inélastique en $x_0 = 1/2$: si x varie de 1 % autour de $x_0 = 1/2$, la fonction varie de moins de 1 % (environ de 0.5 %).
En $x_0 = 1$, $e(f, 1) = 2 > 1$. La fonction f est donc élastique en $x_0 = 1$: si x varie de 1 % autour de $x_0 = 1$, la fonction varie de plus de 1 % (environ de 2 %).

Exercice II (25 min, 4 points)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + 2x) - \ln(1 - 2x)$.

1) La fonction $f(x)$ est définie lorsque

$$\begin{cases} 1 + 2x > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1/2 \\ x < 1/2 \end{cases} \iff x \in \left]-1/2, 1/2\right[\implies D_f = \left]-1/2, 1/2\right[$$

On a $f(0) = \ln(1) - \ln(1) = 0$.

2) Le développement limité de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 est

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

3) On en déduit que

$$\ln(1 + 2x) = (2x) - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

et

$$\ln(1 - 2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = -2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

D'où le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$f(x) = \left[2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3}\right] - \left[-2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3}\right] + x^3 \varepsilon(x) = 4x + \frac{16x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

4) D'où la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{4x + \frac{16x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(4 + \frac{16x^2}{3} + x^2 \varepsilon(x)\right) = 4$$

Exercice III (25 min, 4 points)
La première intégrale est de la forme $u' \, e^u$. D'où

$$I = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx = \left[-e^{1/x} \right]_1^2 = e^1 - e^{1/2}$$

On effectue une intégration par parties pour calculer la seconde intégrale :

$$J = \int_1^e \underbrace{x}_{v'} \underbrace{\ln(x)}_{u} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$$

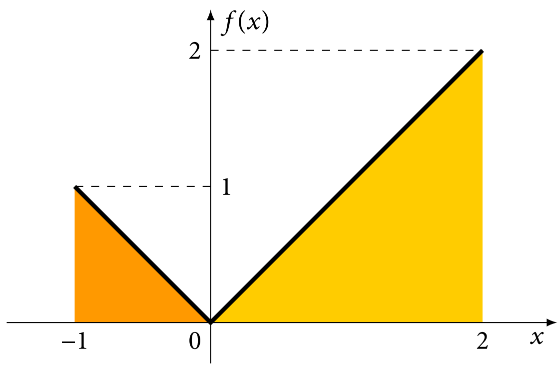
Pour calculer la dernière intégrale, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{x+5}$. On a donc $x = t^2 - 5$, $dx = 2t dt$ et t varie entre 3 et 4. D'où

$$K = \int_4^{11} \frac{x}{\sqrt{x+5}} \, dx = \int_3^4 \frac{t^2 - 5}{t} 2t \, dt = \int_3^4 2t^2 - 10 \, dt = \left[\frac{2}{3} t^3 - 10t \right]_3^4 = \frac{128}{3} - 40 - (18 - 30) = \frac{44}{3}$$

Exercice IV (10 min, 2 points)
Pour l'intégrale suivante, plusieurs méthodes sont possibles. En utilisant la formule de Chasles :

$$I = \int_{-1}^{+2} |x| \, dx = \int_{-1}^{0} -x \, dx + \int_0^{+2} x \, dx = \left[\frac{-1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

En utilisant une représentation graphique :



L'intégrale I est la somme des aires des deux triangles soit $1/2$ et 2. D'où $I = 5/2$.

Exercice V (30 min, 4 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Le déterminant de la matrice A (en le développant par rapport à la deuxième ligne est :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Comme $\det(A) \neq 0$, on en déduit que la matrice A est inversible.

2) On a

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_3$$

3) On a

$$A^2 - 3A = -2I_3 \iff A(A - 3I_3) = -2I3 \iff A\left(\frac{-1}{2}(A - 3I_3) \right) = I_3$$

Comme $AA^{-1} = I_3$, on en déduit que

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_3) = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

4) Retrouver l'inverse de A en utilisant une méthode directe. (voir cours)