Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1 **Semestre 1**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère la fonction $f(x) = x^5 - 15x^3$.

1) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.

2) On a $f'(x) = 5x^4 - 45x^2$ et $f''(x) = 20x^3 - 90x$.

3) Les points critiques de $f(x)$ sont donnés par la condition nécessaire d'optimalité (CNO) :

$$f'(x) = 0 \iff 5x^4 - 45x^2 = 0 \iff 5x^2(x^2 - 9) = 0 \iff 5x^2(x-3)(x+3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -3$$

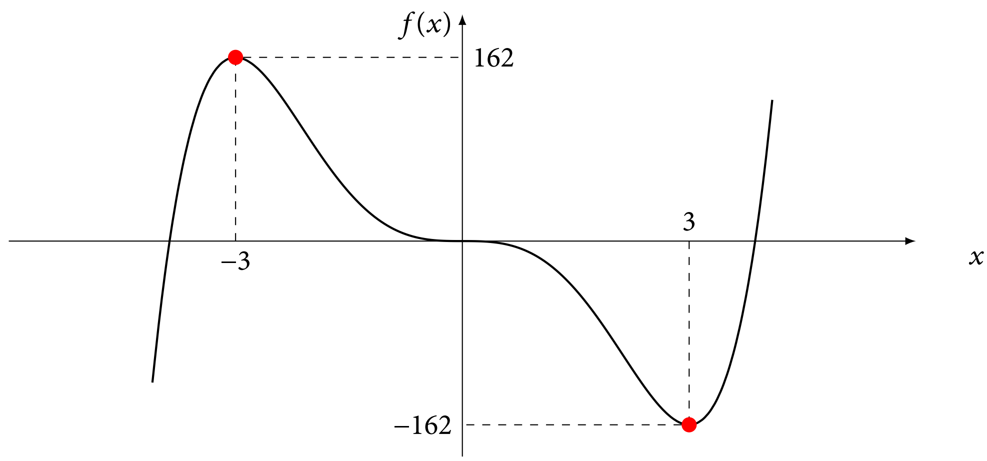
La fonction f admet donc 3 points critiques. On utilise les conditions suffisantes d'optimalité pour déterminer la nature de chaque point :

$$\begin{aligned} f''(3) = 270 > 0 &\implies f \text{ admet un minimum local en } x = 3 \\ f''(-3) = -270 < 0 &\implies f \text{ admet un maximum local en } x = -3 \\ f''(0) = 0 &\implies \text{on ne peut pas conclure} \end{aligned}$$

4) Le tableau de variations de $f(x)$ est

x	$-\infty$		-3		0		$+3$		$+\infty$
f'		+	0	−	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	162	↘		↘	-162	↗	$+\infty$

On en déduit l'allure du graphe de f :



5) On observe donc que f admet des maximums locaux en $x = -3$ et un minimum local en $x = +3$ et pas d'extremum en $x = 0$ (point d'inflexion).

Exercice II (30 min, 5 points)
On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = x^3 - y^2 + 6xy$.

1) Les dérivés partielles de f sont

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 6y \qquad f'_y(x, y) = -2y + 6x \qquad f''_{x^2}(x, y) = 6x \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 6 \qquad f''_{y^2}(x, y) = -2$$

2) La hessienne et le hessien de f sont donc

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(x, y) = (6x) \times (-2) - 6 \times 6 = -12x - 36$$

3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de $f(x, y)$:
a) Les conditions nécessaires d'optimalité donnent :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ -2y + 6x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ -y + 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 6x = 0 \\ y = 3x \end{cases} \iff \begin{cases} x(x + 6) = 0 \\ y = 3x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -6 \\ y = 0 \text{ ou } y = -18 \end{cases}$$

La fonction f admet donc deux points critiques $(0, 0)$ et $(-6, -18)$.
b) On utilise les conditions suffisantes pour déterminer la nature de chaque point :
- au point $(0, 0)$, $\det H_f(0, 0) = -36 < 0$. Il s'agit donc d'un point *col* : pas d'extremum.
- au point $(-6, -18)$, $\det H_f(-6, -18) = 36 > 0$, $f''_{x^2}(-6, -18) = -36 < 0$ et $f''_{y^2}(-6, -18) = -2 < 0$. La fonction admet donc un maximum local au point $(-6, -18)$.

Exercice III (45 min, 7 points)
On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Optimiser} \quad f(x, y) = 2y - \dfrac{8}{x} \\ \text{sous la contrainte} \quad x + y = 6 \end{cases}$$

Dans la suite, on suppose que $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire, $x > 0$.

1) Méthode de Lagrange
a) La fonction $x \mapsto -8/x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée seconde $-16/x^3$ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $y \mapsto 2y$ est concave sur $\mathbb{R}$ car affine. La fonction $f(x, y)$ est donc concave sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions concaves.
b) Le lagrangien associé au problème (P) est $L(x, y, \lambda) = 2y - \dfrac{8}{x} + \lambda(x + y - 6)$. Les conditions nécessaires d'optimalité (CNO) sont donc

$$\begin{cases} 0 = L'_x(x, y, \lambda) = \frac{8}{x^2} + \lambda \\ 0 = L'_y(x, y, \lambda) = 2 + \lambda \\ 0 = L'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = +2 \text{ (ou } x = -2) \\ \lambda = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

La solution $x = -2$ est exclue car x doit être positif. Le problème (P) admet donc un seul point critique $(x_0, y_0) = (2, 4)$ avec $\lambda_0 = -2$. Comme la fonction f est concave et la contrainte $x + y - 6$ est affine, on en déduit que (P) admet un maximum global en $(x_0, y_0) = (2, 4)$.

2) Méthode de substitution Sous la contrainte $x + y = 6$, on a $y = 6 - x$. D'où

$$f(x, y) = f(x, 6 - x) = 12 - 2x - \frac{8}{x} = h(x)$$

Le problème (P) est équivalent au problème d'optimisation de la fonction h (toujours pour $x > 0$). Or

$$h'(x) = 0 \iff -2 + \frac{8}{x^2} \iff x = 2 \text{ (ou } x = -2 \not> 0) \qquad \text{et} \qquad h''(x) = \frac{-16}{x^3} \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

La fonction h est donc concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet alors un maximum global en $x_0 = 2$. D'où $y_0 = 6 - 2 = 4$. Le problème (P) admet donc un maximum global en $(x_0, y_0) = (2, 4)$.

3) Méthode graphique

Les points vérifiant la contrainte sont les points $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $y = 6 - x$ correspondant à la droite rouge ci-dessous.

La courbe de niveau 4 de f correspond aux points $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que

$$f(x, y) = 4 \iff 2y - \frac{8}{x} = 4 \iff y = 2 + \frac{4}{x}$$

représentés en bleu ci-dessous. On voit qu'au point solution $(2, 4)$ la courbe de niveau est tangente à la droite de la contrainte.