Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1 **Semestre 1**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non-graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (15 min, 3 points)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Rappeler la définition du taux d'accroissement de f entre deux réels x_0 et x_1.

2) Donner la définition de la dérivée de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

3) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère la fonction $f(x) = x^5 - 15x^3$.

1) Déterminer les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

2) Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.

3) Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$.

4) Construire le tableau de variation de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f en y précisant le(s) extremum(s).

5) Le(s) extremum(s) de f sont-ils globaux ?

Exercice II (30 min, 5 points)
On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = x^3 - y^2 + 6xy$.

1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

2) Donner la hessienne de f et calculer son hessien.

3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de $f(x, y)$:

  a) Donner les conditions nécessaires et déterminer le(s) point(s) critique(s).

  b) En utilisant les conditions suffisantes, déterminer la nature de(s) point(s) critiques(s).

Exercice III (45 min, 7 points)
On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser} \quad f(x, y) = 2y - \dfrac{8}{x} \\ \text{sous la contrainte} \quad x + y = 6 \end{cases}$$

Dans la suite, on suppose que $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire, $x > 0$.

1) Méthode de Lagrange

  a) Montrer que la fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

  b) Déterminer le(s) extremum(s) de (P).

2) Méthode de substitution

  a) Montrer que le problème (P) se ramène à un problème d'optimisation d'un fonction d'une variable $h(x)$

  b) Résoudre ce problème.

3) Méthode graphique

  a) Sur un même graphique, tracer l'allure de la courbe de niveau 4 de f ainsi que les points vérifiant la contrainte.

  b) Localiser sur ce dessin le(s) point(s) solution(s) de (P).