ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1 **Semestre 2**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (15 min, 3 points)
Soit $f(x) = 2^x$.

1) On sait que $f(x) = 2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$. D'où $f'(x) = \ln(2)\,\mathrm{e}^{x\ln(2)} = \ln(2)2^x$.

2) L'élasticité de $f(x)$ en $x > 0$ est

$$e(f,x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} = x\frac{\ln(2)2^x}{2^x} = x\ln(2)$$

3) On a $e(f,1/2) \approx 0.35 < 1$. La fonction est donc inélastique en $x = 1/2$. Lorsque x varie de 1 %, la fonction varie de moins de 1 %.
De même, $e(f,2) \approx 1.39 > 1$. La fonction est donc élastique en $x = 2$. Lorsque x varie de 1 %, la fonction varie de plus de 1 %.

Exercice II (30 min, 4 points)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 2x\,\mathrm{e}^x$$

1) Le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction e^x est

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

2) On en déduit

$$\mathrm{e}^{-2x} = 1 + (-2x) + \frac{1}{2}(-2x)^2 + \frac{1}{6}(-2x)^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

et

$$2x\,\mathrm{e}^x = 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x) = 2x + 2x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

D'où

$$f(x) = \left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3\right) - \left(2x + 2x^2 + x^3\right) + x^3\varepsilon(x) = 1 - 4x - \frac{7}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

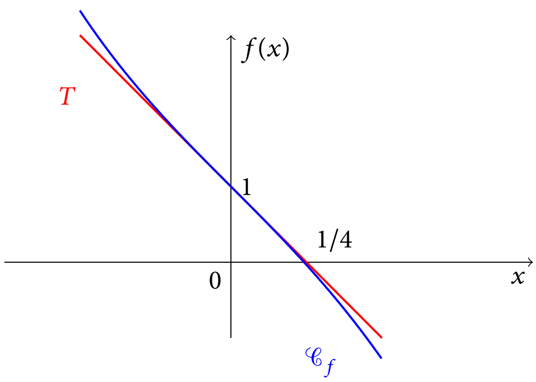
3) Faire une étude locale de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = 0$:

a) L'équation de la tangente correspond à la partie affine du développement limité soit $T : y = 1 - 4x$.

b) On a

$$f(x) - [1-4x] = -\frac{7}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \approx -\frac{7}{3}x^3 \begin{cases} > 0 & \text{si } x < 0 \\ < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_f \text{ au dessus de } T & \text{si } x < 0 \\ C_f \text{ au dessous de } T & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c) La représentation de $f(x)$ au voisinage de 0 est donc



Exercice III (15 min, 3 points)
Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène dont on connaît les deux dérivées partielles :

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{y^2} \qquad f'_y(x,y) = \frac{-2x}{y^3}$$

1) Pour $\lambda > 0$, on a

$$f'_x(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{(\lambda y)^2} = \frac{1}{\lambda^2 y^2} = \lambda^{-2}\frac{1}{y^2} = \lambda^{-2} f'_x(x,y)$$

De même,

$$f'_y(\lambda x, \lambda y) = \frac{-2(\lambda x)}{(\lambda y)^3} = \lambda^{-2}\frac{-2x}{y^3} = \lambda^{-2} f'_y(x,y)$$

Donc les deux dérivées partielles sont homogènes de degré -2. Le fonction f est donc homogène de degré $-2+1=-1$.

2) D'après la formule d'Euler, on a

$$(-1)f(x,y) = x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{-2xy}{y^3} = -\frac{x}{y^2} \implies f(x,y) = \frac{x}{y^2}$$

3) On vérifie que

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{y^2} \qquad f'_y(x,y) = \frac{-2x}{y^3}$$

Exercice IV (25 min, 4 points)
On a

$$I = \int_1^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

et

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

Pour calculer K, on utilise une intégration par parties en posant $u = x$ et $v' = \mathrm{e}^{-x}$. D'où $u' = 1$ et $v = -\mathrm{e}^{-x}$.

$$K = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$$

Pour la dernière intégrale, on procède par changement de variable en posant $t = \sqrt{x+3}$. On a $x = t^2 - 3$ et $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Lorsque $x = 1$, $t = 2$ et lorsque $x = 6$, $t = 3$. D'où

$$L = \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{t^2-3}{t} \times 2t\,\mathrm{d}t = \int_2^3 2t^2 - 6\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^3 - 6t\right]_2^3 = \frac{20}{3}$$

Exercice V (25 min, 4 points)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est inversible car $\det A = 1\times 3 - 2\times 1 = 1 \neq 0$.

2) On a

$$A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

3) On a donc

$$A^2 - 4A = -I_2 \iff A(A - 4I_2) = -I_2 \iff A(4I_2 - A) = I_2 \iff A^{-1} = 4I_2 - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Pour $X = (x,y)'$ et $Y = (\alpha,\beta)'$, on a

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = \alpha \\ 2x + 3y = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3\alpha - \beta \\ y = -2\alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$