ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1 **Semestre 2**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (10 min, 2 points)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

1) Rappeler la définition de l'intégrale de f de a à b.

2) Généraliser la définition lorsque la fonction f n'est plus nécessairement positive.

Exercice I (15 min, 3 points)
Soit $f(x) = 2^x$.

1) Calculer la dérivée de $f(x)$.

2) Déterminer l'élasticité de $f(x)$ en $x > 0$.

3) Interpréter la valeur de l'élasticité lorsque $x = 1/2$ et lorsque $x = 2$.

Exercice II (30 min, 4 points)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 2x\,\mathrm{e}^{x}$$

1) Rappeler le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction e^x

2) En déduire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction $f(x)$.

3) Faire une étude locale de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = 0$:

a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ en $x = 0$.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

c) Faire une représentation graphique de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$.

Exercice III (15 min, 3 points)
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène dont on connaît les deux dérivées partielles :

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{y^2} \qquad f'_y(x,y) = \frac{-2x}{y^3}$$

1) Vérifier que les deux dérivées partielles de f sont homogènes et préciser leur degré.

2) À l'aide de la formule d'Euler, trouver l'expression de la fonction $f(x,y)$.

3) Vérifier votre calcul.

Exercice IV (25 min, 4 points)
Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_1^2 (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$K = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad L = \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x$$

Pour calculer l'intégrale L, on pourra poser $t = \sqrt{x+3}$.

Exercice V (25 min, 4 points)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Sans calculer son inverse, montrer que A est inversible.

2) Calculer $A^2 - 4A$

3) En déduire l'inverse de A.

4) Retrouver l'inverse de A en utilisant une méthode directe.