Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1 **Semestre 1**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère la fonction $f(x) = x^4 - 32x^2 + 150$.

1) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty$

2) On a $f'(x) = 4x^3 - 64x$ et $f''(x) = 12x^2 - 64$.

3) Les points critiques de $f(x)$ sont donnés par la condition nécessaire d'optimalité (CNO) :

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 64x = 0 \iff 4x(x^2-16) = 0 \iff 4x(x-4)(x+4) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 4 \text{ ou } x = -4$$

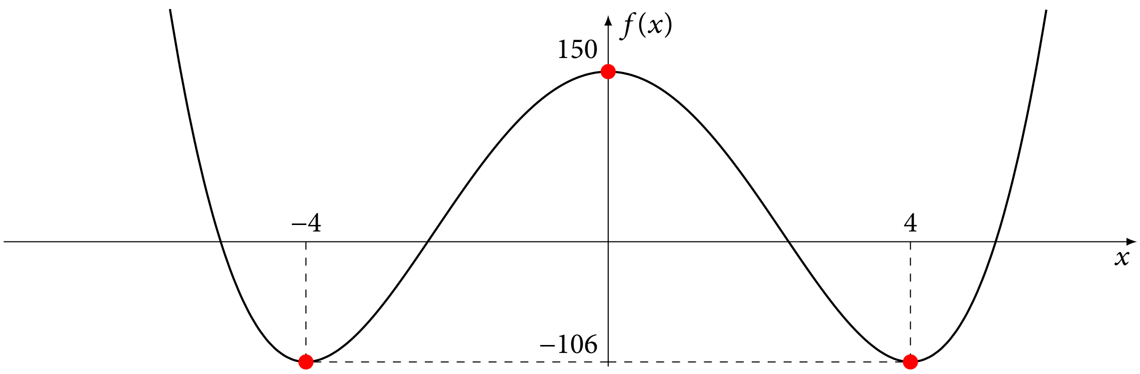
La fonction f admet donc 3 points critiques. On utilise les conditions suffisantes d'optimalité pour déterminer la nature de chaque point :

$$\begin{aligned} f''(0) = -64 < 0 &\implies f \text{ admet un maximum local en } x = 0 \\ f''(2) = 128 > 0 &\implies f \text{ admet un minimum local en } x = 4 \\ f''(-2) = 128 > 0 &\implies f \text{ admet un minimum local en } x = -4 \end{aligned}$$

4) Le tableau de variations de $f(x)$ est

x	$-\infty$		-4		0		$+4$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-106	↗	150	↘	-106	↗	$+\infty$

On en déduit l'allure du graphe de f :



5) On observe donc que f admet des minimums globaux en $x = -4$ et $x = +4$ et un maximum local en $x = 0$.

Exercice II (30 min, 5 points)
On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = 12xy - 2x^3 - 3y^2$.

1) Les dérivés partielles de f sont

$$f'_x(x, y) = 12y - 6x^2 \qquad f'_y(x, y) = 12x - 6y \qquad f''_{x^2}(x, y) = -12x \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 12 \qquad f''_{y^2}(x, y) = -6$$

2) La hessienne et le hessien de f sont donc

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -12x & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(x, y) = (-12x) \times (-6) - 12 \times 12 = 72x - 144$$

3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de $f(x, y)$:

a) Les conditions nécessaires d'optimalité donnent :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12y - 6x^2 = 0 \\ 12x - 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - x^2 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x(4 - x) = 0 \\ y = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 4 \\ y = 0 \text{ ou } y = 8 \end{cases}$$

La fonction f admet donc deux points critiques $(0, 0)$ et $(4, 8)$.

b) On utilise les conditions suffisante pour déterminer la nature de chaque point :

- au point $(0, 0)$, $\det H_f(0, 0) = -144 < 0$. Il s'agit donc d'un point *col* : pas d'extremum.
- au point $(4, 8)$, $\det H_f(4, 8) = 144 > 0$, $f''_{x^2}(4, 8) = -48 < 0$ et $f''_{y^2}(4, 8) = -6 < 0$. La fonction admet donc un maximum local au point $(4, 8)$.

Exercice III (45 min, 7 points)
On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 12y \\ \text{sous la contrainte } 2x - y = 6 \end{cases}$$

1) Méthode de Lagrange

a) La fonction f est une fonction convexe comme somme de deux fonctions convexes d'une seule variables : $f_1(x) = 2x^2$ avec $f_1''(x) = 4 \geqslant 0$ et $f_2(y) = y^2 - 12y$ avec $f_2''(y) = 2 \geqslant 0$.

b) Le lagrangien associé à (P) est $L(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 12y + \lambda(2x - y - 6)$. Les points critiques de (P) sont données par les conditions nécessaires d'optimalité :

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2\lambda = 0 \\ 2y - 12 - \lambda = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\lambda/2 \\ y = 6 + \lambda/2 \\ 2(-\lambda/2) - (6 + \lambda/2) - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ \lambda = -8 \end{cases}$$

Le problème (P) admet donc un unique point critique $(4, 2)$ pour $\lambda = -8$.

c) Comme la fonction objectif f est convexe et la fonction contrainte $g(x, y) = 2x - y - 6$ est affine, le problème (P) admet un minimum global en $(4, 2)$. Ce minimum est $f(4, 2) = 12$.

2) Méthode de substitution

a) Sous la contrainte, on a

$$2x - y = 6 \implies y = 2x - 6 \implies f(x, y) = f(x, 2x - 6) = 2x^2 + (2x - 6)^2 + 12(2x - 6) = 6x^2 - 48x + 108 = h(x)$$

Résoudre le problème (P) revient à optimiser la fonction h.

b) On utilise la CNO :

$$h'(x) = 0 \iff 12x - 48 = 0 \iff x = 4 \qquad h''(x) = 12 \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies h \text{ convexe}$$

La fonction h étant convexe, elle admet un minimum global en $x_0 = 4$.

c) On a alors $y_0 = 2x_0 - 6 = 2$. Le problème (P) admet donc aussi un minimum global en $(x_0, y_0) = (4, 2)$.