

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1

Semestre 1

Licence Économie-Gestion – 1<sup>re</sup> année

**Matière :** Mathématiques appliquées

**Durée :** 2 heures

**Enseignant :** Vincent Jalby

**Calculatrices non-programmables et non-graphiques autorisées. Aucun document autorisé.**

**Question de cours** (15 min, 3 points)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Rappeler la définition du taux d'accroissement de  $f$  entre deux réels  $x_0$  et  $x_1$ .
- 2) Donner la définition de la dérivée de  $f$  en  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
- 3) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  en  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Exercice I** (30 min, 5 points)

On considère la fonction  $f(x) = x^4 - 32x^2 + 150$ .

- 1) Déterminer les limites de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- 2) Calculer les dérivées première et seconde de  $f(x)$ .
- 3) Déterminer le(s) extremum(s) de  $f(x)$ .
- 4) Construire le tableau de variation de  $f(x)$  et donner l'allure du graphe de  $f$  en  $y$  précisant le(s) extremum(s).
- 5) Le(s) extremum(s) de  $f$  sont-ils globaux?

**Exercice II** (30 min, 5 points)

On considère la fonction de deux variables  $f(x, y) = 12xy - 2x^3 - 3y^2$ .

- 1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$ .
- 2) Donner la hessienne de  $f$  et calculer son hessien.
- 3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de  $f(x, y)$  :
  - a) Donner les conditions nécessaires et déterminer le(s) point(s) critique(s).
  - b) En utilisant les conditions suffisantes, déterminer la nature de(s) point(s) critiques(s).

**Exercice III** (45 min, 7 points)

On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 12y \\ \text{sous la contrainte } 2x - y = 6 \end{cases}$$

**1) Méthode de Lagrange**

- a) Étudier la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Déterminer le(s) extremum(s) de  $(P)$ .

**2) Méthode de substitution**

- a) Montrer que le problème  $(P)$  se ramène à un problème d'optimisation d'une fonction d'une variable  $h(x)$ .
- b) Résoudre ce problème.
- c) Qu'en déduisez-vous pour le problème  $(P)$ ?