Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

Session 1 **Semestre 2**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Question de cours (20 min, 4 points)
On suppose la fonction $f(x, y)$ homogène de degré 3 :

$$\forall \lambda > 0 \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$$

Soit $g(x, y) = f(x^2, xy)$. Montrons que g est homogène :

$$\forall \lambda > 0 \qquad g(\lambda x, \lambda y) = f\big((\lambda x)^2, (\lambda x)(\lambda y)\big) = f(\lambda^2 x, \lambda^2 xy) = (\lambda^2)^3 f(x^2, xy) = \lambda^6 g(x, y)$$

Donc g est homogène de degré 6.

Exercice I (30 min, 5 points)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{1}{1-2x}$$

1) La fonction f est définie lorsque $1 + x \neq 0$ et $1 - 2x \neq 0$, soit $x \neq -1$ et $x \neq 1/2$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1/2\}$.

2) Le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de la fonction $\dfrac{1}{1+x}$ est

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

3) On en déduit

$$\frac{2}{1+x} = 2 - 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

et

$$\frac{1}{1-2x} = 1 - (-2x) + (-2x)^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

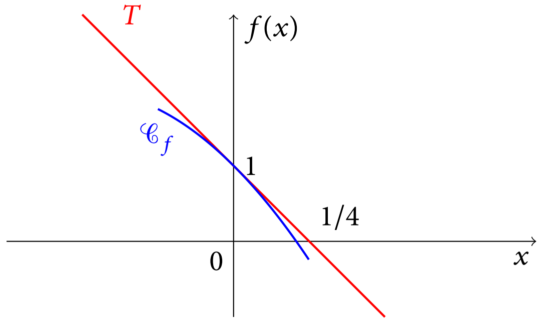
D'où

$$f(x) = (2 - 2x + 2x^2) - (1 + 2x + 4x^2) + x^2\varepsilon(x) = 1 - 4x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

4) Faire une étude locale de la fonction $f(x)$ au voisinage de 0 :
a) L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0 correspond à la partie affine ("$ax + b$") du développement limité soit $y = 1 - 4x$.
b) Pour x proche de 0, on a

$$f(x) - [1 - 4x] = -2x^2 + x^2\varepsilon(x) \approx -2x^2 \leq 0$$

Donc $\mathscr{C}_f$ se trouve en dessous de la tangente T.
c) La représentation de $f(x)$ au voisinage de 0 est donc



Exercice II (30 min, 4 points)
On calcule directement la première intégrale :

$$I = \int_1^2 (x^3 - 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x\right]_1^2 = (4-4) - (\tfrac{1}{4} - 2) = \frac{7}{4}$$

La seconde est de la forme u'/u^2 et donc de primitive de $\frac{-1}{u}$:

$$J = \int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \left[\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right]_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

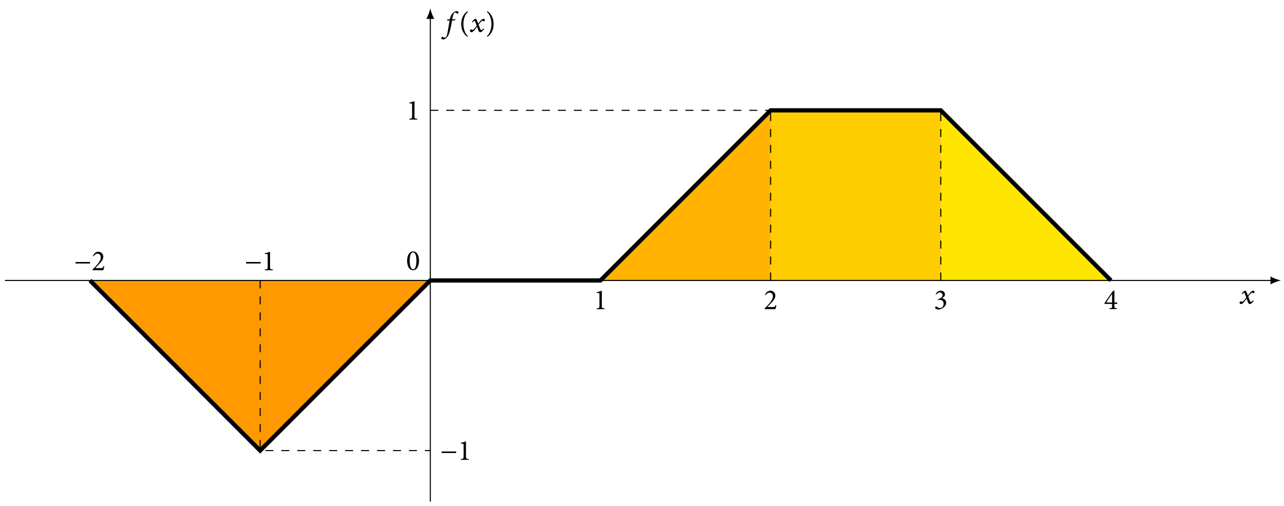
Pour la troisième, on utilise une intégration par parties, en posant $v' = x$ (et donc $v = x^2/2$) et $u = \ln x$ (et donc $u' = 1/x$) :

$$K = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1+\mathrm{e}^2}{4}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on pose $t = \sqrt{x-5}$. Donc $x = t^2 + 5$ et $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. La variable t variant de 1 à 2.

$$L = \int_6^9 \frac{x}{\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2+5}{t}2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2t^2 + 10\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}t^3 + 10t\right]_1^2 = (\tfrac{16}{3} + 20) - (\tfrac{2}{3} + 10) = \tfrac{14}{3} + 10 = \frac{44}{3}$$

Exercice III (10 min, 2 points)
L'intégrale I correspond à l'aire algébrique de la surface comprise entre la courbe, l'axe des x, $x = -2$ et $x = 4$.



L'aire est comptée positivement lorsqu'elle est au-dessus de l'axe des x et négativement lorsqu'elle est au-dessous. Ici, elle correspond donc à l'aire (négative) d'un triangle (entre −2 et 0), plus l'aire (positive) d'un triangle (entre 1 et 2) plus l'aire d'un carré (entre 2 et 3) plus l'aire du triangle (entre 3 et 4). On a donc

$$I = \int_{-2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2\times 1}{2} + \frac{1\times 1}{2} + 1\times 1 + \frac{2\times 1}{2} = 1$$

Exercice IV (30 min, 5 points)
Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

1) La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. On a $\det A = 1 \times (a-1) - 1 \times 1 = a - 2$. La matrice A est donc inversible si et seulement si $a \neq 2$.

2) On a

$$A^2 - aA = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & a^2 - 2a + 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a \\ a & a^2 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & 0 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix} = (2-a)I_2$$

3) On a

$$A^2 - aA = (2-a)I_2 \implies A(A - aI_2) = (2-a)I_2 \implies A\left(\frac{A - aI_2}{2-a}\right) = I_2 \implies A^{-1} = \frac{1}{2-a}(A - aI_2)$$

Lorsque $a = 3$ on obtient

$$A^{-1} = -(A - 3I_2) = 3I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = \alpha \\ x + 2y = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\alpha - \beta \\ y = -\alpha + \beta \end{cases} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$