ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

Session 1 **Semestre 2**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (20 min, 4 points)
Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

1) Rappeler la définition d'un cône K de $\mathbb{R}^2$.

2) Rappeler la définition d'une fonction homogène de degré α sur K.

3) Si $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré 3, montrer que la fonction $g(x, y) = f(x^2, xy)$ est aussi homogène en précisant son degré.

Exercice I (30 min, 5 points)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{1}{1-2x}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Rappeler le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de la fonction $\dfrac{1}{1+x}$

3) En déduire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de la fonction $f(x)$.

4) Faire une étude locale de la fonction $f(x)$ au voisinage de 0 :

- **a)** Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0.
- **b)** Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.
- **c)** Faire une représentation de $f(x)$ au voisinage de 0.

Exercice II (30 min, 4 points)
Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_1^2 (x^3 - 2)\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

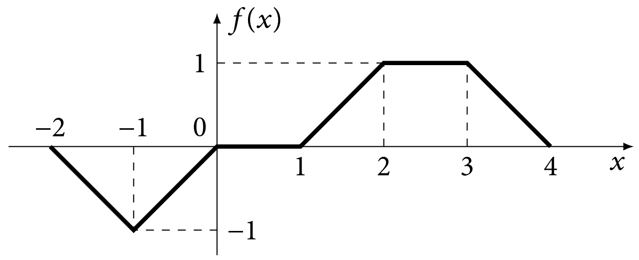
$$K = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x \qquad L = \int_6^9 \frac{x}{\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x$$

Pour calculer l'intégrale L, on pourra poser $t = \sqrt{x-5}$.

Exercice III (10 min, 2 points)
Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x$$

où f est la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous.



Vous devez détailler votre raisonnement et votre calcul !

Exercice IV (30 min, 5 points)
Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a, la matrice A est inversible.

2) Calculer $A^2 - aA$

3) En déduire l'inverse de A. Donner sa valeur lorsque $a = 3$.

4) Pour $a = 3$, retrouver l'inverse de A en utilisant une méthode directe.