Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

Session 1 **Semestre 1**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{16 + x^2}{x}$.

1) La fonction f est définie lorsque son dénominateur est non-nul, soit $x \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{16+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \text{de même} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

3) On a

$$f(x) = \frac{16}{x} + x \implies f'(x) = -\frac{16}{x^2} + 1 \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{32}{x^3}$$

4) La CNO donne

$$f'(x) = 0 \iff -\frac{16}{x^2} + 1 = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = -4 \quad \text{ou} \quad x = +4$$

On a donc deux points candidats. On utilise alors les CSO :

$$x = -4 \implies f''(-4) = -1/2 < 0 \implies \text{maximum local}$$

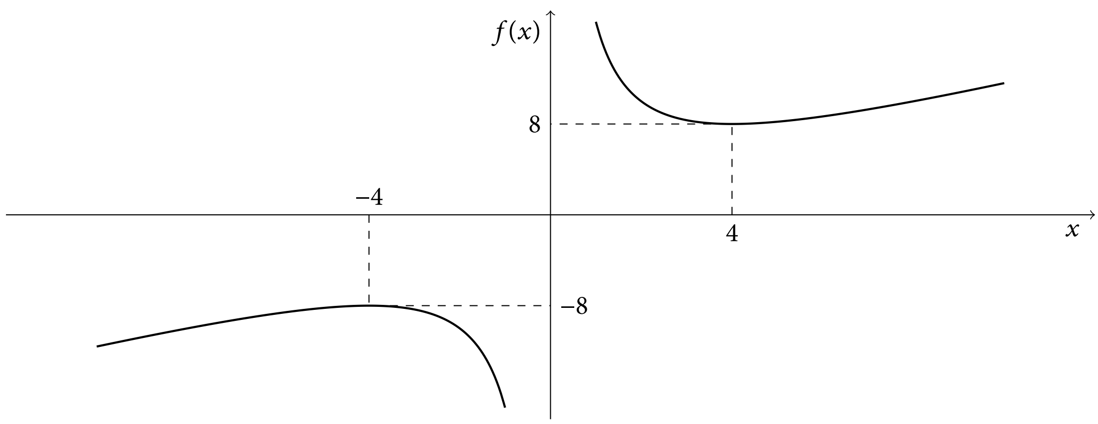
et

$$x = +4 \implies f''(+4) = 1/2 > 0 \implies \text{minimum local}$$

La fonction f admet donc un maximum local en $x = -4$ et un minimum local en $x = +4$.

5) Le tableau de variations et le graphe de $f(x)$ sont

x	$-\infty$		-4		0		$+4$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$+8$	↗	$+\infty$



6) On voit que les extrémums trouvés ne sont que locaux (ou encore, il n'est pas possible de répondre à cette question, le domaine de définition de la fonction n'étant pas un intervalle). Toutefois, sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction admet un maximum global en $x = -4$ et sur $]0, +\infty[$, la fonction admet un minimum global en $x = +4$.

Exercice II (20 min, 4 points)

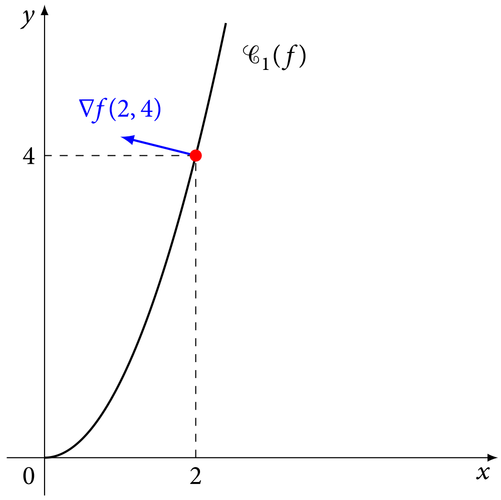
Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

1) On a

$$f'_x(x, y) = \frac{-2y}{x^3} \qquad f'_y(x, y) = \frac{1}{x^2} \qquad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y/x^3 \\ 1/x^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(2, 4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

2) La courbe de niveau 1 de f est $\mathscr{C}_1(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : f(x, y) = 1\}$. D'où

$$f(x, y) = 1 \iff \frac{y}{x^2} = 1 \iff y = x^2 \quad x > 0$$



Exercice III (55 min, 8 points)

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2xy - 6y$.

1) Etude de la convexité de f

a) Les dérivés partielles de f sont

$$f'_x(x, y) = 8x - 2y \qquad f'_y(x, y) = 2y - 2x - 6 \qquad f''_{x^2}(x, y) = 8 \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -2 \qquad f''_{y^2}(x, y) = 2$$

b) La hessienne et le hessien de f sont donc

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(x, y) = 8 \times 2 - (-2) \times (-2) = 12$$

c) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\det H_f(x, y) = 12 \geqslant 0$, $f''_{x^2}(x, y) = 8 \geqslant 0$, $f''_{y^2}(x, y) = 2 \geqslant 0$. Donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) Optimisation sans contrainte Pour déterminer les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ on utilise les conditions nécessaires d'optimalité :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 2y = 0 \\ 2y - 2x - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4x \\ 8x - 2x - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

La fonction f admet donc un unique point critique $(x_0, y_0) = (1, 4)$.

a) Comme la fonction f est convexe, elle admet un minimum global en $(1, 4)$. Ce minimum est $f(1, 4) = -12$

3) Optimisation avec contrainte : on souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2xy - 6y \\ \text{sous la contrainte } x - y = 4 \end{cases}$$

a) Le lagrangien associé à (P) est $L(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 2xy - 6y + \lambda(x - y - 4)$. Les points critiques de (P) sont données par les conditions nécessaires d'optimalité :

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 2y + \lambda = 0 \\ 2y - 2x - 6 - \lambda = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4x + \frac{1}{2}\lambda \\ 2(4x + \frac{1}{2}\lambda) - 2x - 6 - \lambda = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -14 \\ x = 1 \\ y = x - 4 = -3 \end{cases}$$

Le problème (P) admet donc un unique point critique $(1, -3)$ pour $\lambda = -14$.

b) Comme la fonction objectif f est convexe et la fonction contrainte $g(x, y) = y - x - 4$ est affine, le problème (P) admet un minimum global en $(1, -3)$. Ce minimum est $f(1, -3) = 37$.