

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

Session 1

Semestre 1

Licence Économie-Gestion – 1<sup>re</sup> année

**Matière :** Mathématiques appliquées

**Durée :** 2 heures

**Enseignant :** Vincent Jalby

**Calculatrices non-programmables et non-graphiques autorisées. Aucun document autorisé.**

**Question de cours** (15 min, 3 points)

- 1) Rappeler la définition d'un sous-ensemble convexe  $C$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Expliquer la définition à l'aide d'un dessin.
- 3) Donner un exemple d'un ensemble convexe et d'un ensemble non-convexe sous forme de dessin.

**Exercice I** (30 min, 5 points)

On considère la fonction  $f(x) = \frac{16 + x^2}{x}$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- 2) Calculer la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- 3) Calculer les dérivées première et seconde de  $f(x)$ .
- 4) Déterminer le(s) extremum(s) de  $f(x)$ .
- 5) Construire le tableau de variations de  $f(x)$  et donner l'allure du graphe de  $f$  en y précisant le(s) extremum(s)
- 6) Le(s) extremum(s) de  $f$  sont-ils globaux ?

**Exercice II** (20 min, 4 points)

Soit  $f$  la fonction de deux variables définie par  $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$  pour  $x > 0$  et  $y > 0$ .

- 1) Calculer les dérivées partielles (premières) de  $f$ . En déduire le gradient de  $f$  au point  $(2, 4)$ .
- 2) Déterminer la courbe de niveau 1 de  $f$ . En faire une représentation graphique.
- 3) Représenter le gradient de  $f$  en  $(2, 4)$  sur le graphique précédent.

**Exercice III** (55 min, 8 points)

Soit  $f$  la fonction de deux variables définie par  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2xy - 6y$ .

**1) Etude de la convexité de  $f$**

- a) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$ .
- b) Former la hessienne et calculer le hessien de  $f$ .
- c) En déduire que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^2$ .

**2) Optimisation sans contrainte**

- a) Déterminer le(s) extremum(s) de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Préciser la nature du ou des extremums (minimum ou maximum, local ou global).

**3) Optimisation avec contrainte :** on souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2xy - 6y \\ \text{sous la contrainte } x - y = 4 \end{cases}$$

- a) Donner le lagrangien associé à  $(P)$  et déterminer le(s) point(s) critique(s).
- b) Préciser la nature du ou des extremums (minimum ou maximum, local ou global).