Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1 **Semestre 2**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 4 points)

On considère la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1) On sait que $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, d'où

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

2) La fonction $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$. Donc $f(x)$ est définie pour $1+x > 0$ et $1-x > 0$. D'où $x > -1$ et $x < 1$, donc $-1 < x < 1$. Soit $D_f =]-1, +1[$.

3) Le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

4) D'où

$$\ln(1-x) = \ln(1+(-x)) = (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 + x^3\varepsilon(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

On en déduit le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 :

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right] - \left[-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right] + x^3\varepsilon(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

5) En utilisant le développement limité ci-dessus, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[2x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[2 + \frac{2}{3}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right] = 2$$

Exercice II (15 min, 3 points)

Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré 2 dont on connaît les deux dérivées partielles :

$$f'_x(x,y) = \frac{-y^3}{3x^2} \qquad f'_y(x,y) = \frac{y^2}{x}$$

1) La dérivée partielle $f'_x(x,y)$ est homogène de degré 1 car

$$\forall \lambda > 0 \qquad f'_x(\lambda x, \lambda y) = \frac{-(\lambda y)^3}{3(\lambda x)^2} = \frac{-\lambda^3 y^3}{3\lambda^2 x^2} = \lambda \frac{-y^3}{3x^2} = \lambda f'_x(x,y)$$

De même pour $f'_y(x,y)$.

2) La formule d'Euler donne

$$2f(x,y) = x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y) = x\frac{-y^3}{3x^2} + y\frac{y^2}{x} = \frac{-y^3}{3x} + \frac{y^3}{x} = \frac{2y^3}{3x} \implies f(x,y) = \frac{y^3}{3x}$$

3) On vérifie que

$$f'_x(x,y) = \frac{-y^3}{3x^2} \qquad f'_y(x,y) = \frac{y^2}{x}$$

Exercice III (30 min, 5 points)
On calcule directement la première intégrale :

$$I = \int_0^3 (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^3 = 9 - 3 = 6$$

La seconde est de la forme $u'/2\sqrt{u}$ et donc dérivée de $\sqrt{u}$:

$$J = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^2$$

Pour la troisième, on utilise une intégration par parties, en posant $u = x$ (et donc $u' = 1$) et $v' = \mathrm{e}^{-x}$ (et donc $v = -\mathrm{e}^{-x}$) :

$$K = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on pose $t = \sqrt{x-3}$. Donc $x = t^2+3$ et $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. La variable t variant de 1 à 2.

$$L = \int_4^7 \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2+3}{t} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2t^2 + 6\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}t^3 + 6t\right]_1^2 = (\tfrac{16}{3} + 12) - (\tfrac{2}{3} + 6) = \tfrac{14}{3} + 6 = \frac{32}{3}$$

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) On a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$$

Donc la matrice A est inversible.

2)

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

3)

$$A^2 - 3A = I_2 \implies A(A - 3I_2) = I_2 \qquad \left.\begin{matrix} A(A-3I_2) = I_2 \\ AA^{-1} = I_2 \end{matrix}\right\} \implies A^{-1} = A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

4) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, on a

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = \alpha \\ 3x + 2y = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2\alpha + \beta \\ y = 3\alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$