Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1 **Semestre 1**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère la fonction $f(x) = 8x^2 - x^4 + 3$.

1) La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Son domaine de définition est donc $D_f = \mathbb{R}$.

2) La limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ est

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (-x^4) = -\infty$$

3) Les dérivées première et seconde de $f(x)$ sont

$$f(x) = 8x^2 - x^4 + 3 \qquad f'(x) = 16x - 4x^3 \qquad f''(x) = 16 - 12x^2$$

4) La CNO donne

$$f'(x) = 0 \iff 16x - 4x^3 = 0 \iff 4x(4 - x^2) = 0 \iff 4x(2 - x)(2 + x) = 0$$

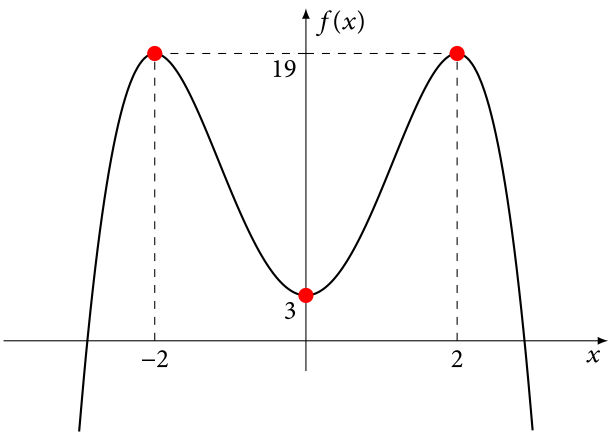
La fonction f possède donc 3 points critiques $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.
Les CSO donnent

- $f''(x_1) = f''(-2) = -32 < 0$. La fonction f admet un maximum local en $x_1 = -2$.
- $f''(x_2) = f''(0) = 16 > 0$. La fonction f admet un minimum local en $x_1 = -2$.
- $f''(x_3) = f''(+2) = -32 < 0$. La fonction f admet un maximum local en $x_3 = +2$.

5) Le tableau de variations de $f(x)$ est

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	19	$\searrow$	3	$\nearrow$	19	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit l'allure du graphe de f :



6) On voit sur le tableau de variation (ou sur le graphique) que le minimum en $x_2 = 0$ n'est que local (car f tend vers $-\infty$) et que le maximum (en $x_1 = -2$ et $x_3 = +2$) est global.

Exercice II (30 min, 5 points)
On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = x^2 + y^3 + 6xy$.

1) Les dérivées partielles premières et secondes de f sont

$$f'_x(x, y) = 2x + 6y \qquad f'_y(x, y) = 3y^2 + 6x \qquad f''_{x^2}(x, y) = 2 \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 6 \qquad f''_{y^2}(x, y) = 6y$$

2) La hessienne et le hessien de f sont donc

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 6y \end{pmatrix} \qquad \det H_f(x, y) = 12y - 36$$

3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de $f(x, y)$:

a) Les CNO donnent

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 3y^2 + 6x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3y \\ 3y^2 - 18y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3y \\ 3y(y - 6) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -18 \\ y = 0 \text{ ou } y = 6 \end{cases}$$

La fonction f admet donc deux points critiques $(x_1, y_1) = (0, 0)$ et $(x_2, y_2) = (-18, 6)$.

b) Les conditions suffisantes donnent

$$\det H_f(x_1, y_1) = -36 < 0 \implies \text{Pas d'extrémum en } (0, 0) \text{ (point col)}$$

$$\det H_f(x_2, y_2) = 36 > 0 \quad f''_{x^2}(x_2, y_2) = 2 > 0 \quad f''_{x^2}(x_2, y_2) = 36 > 0 \implies \text{minimum local en } (x_2, y_2)$$

Exercice III (45 min, 7 points)
On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 3x^2 + y^2 \\ \text{sous la contrainte } 2x - y = 7 \end{cases}$$

1) Méthode de Lagrange

a) La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de deux fonctions convexes d'une seule variable : $x \mapsto 3x^2$ (avec $(3x^2)'' = 6 \geqslant 0$) et $y \mapsto y^2$ (avec $(y^2)'' = 2 \geqslant 0$).

b) Le lagrangien associé au problème (P) est $L(x, y, \lambda) = 3x^2 + y^2 + \lambda(2x - y - 7)$. Les CNO donnent

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + 2\lambda = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{2\lambda}{3} - \frac{\lambda}{2} - 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{7\lambda}{6} = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ \lambda = -6 \end{cases}$$

Le problème (P) admet donc un point candidat $(x_0, y_0) = (2, -3)$ avec $\lambda_0 = -6$. Comme la fonction objectif f est convexe et que la contrainte est affine, les CNO sont suffisantes. Le problème (P) admet donc un minimum global en $(x_0, y_0) = (2, -3)$

2) Méthode de substitution

a) Sous la contrainte, on a

$$2x - y = 7 \implies y = 2x - 7 \implies f(x, y) = f(x, 2x - 7) = 3x^2 + (2x - 7)^2 = 7x^2 - 28x + 49 = h(x)$$

Résoudre le problème (P) revient à optimiser la fonction h.

b) On utilise la CNO :

$$h'(x) = 0 \iff 14x - 28 = 0 \iff x = 2 \qquad h''(x) = 14 \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies h \text{ convexe}$$

La fonction h étant convexe, elle admet un minimum global en $x_0 = 2$.

c) On a alors $y_0 = 2x_0 - 7 = -3$. Le problème (P) admet donc aussi un minimum global en $(x_0, y_0) = (2, -3)$.