

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1

Semestre 1

Licence Économie-Gestion – 1<sup>re</sup> année

**Matière :** Mathématiques appliquées

**Durée :** 2 heures

**Enseignant :** Vincent Jalby

**Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.**

**Question de cours** (15 min, 3 points)

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

- 1) Rappeler la définition d'une fonction convexe.
- 2) Expliquer la définition à l'aide d'un dessin.
- 3) Donner deux exemples de fonctions convexes.

**Exercice I** (30 min, 5 points)

On considère la fonction  $f(x) = 8x^2 - x^4 + 3$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- 2) Déterminer la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- 3) Calculer les dérivées première et seconde de  $f(x)$ .
- 4) Déterminer le(s) extremum(s) de  $f(x)$ .
- 5) Construire le tableau de variations de  $f(x)$  et donner l'allure du graphe de  $f$  en y précisant le(s) extremum(s)
- 6) Le(s) extremum(s) de  $f$  sont-ils globaux ?

**Exercice II** (30 min, 5 points)

On considère la fonction de deux variables  $f(x, y) = x^2 + y^3 + 6xy$ .

- 1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$ .
- 2) Donner la hessienne de  $f$  et calculer son hessien.
- 3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de  $f(x, y)$  :
  - a) Donner les conditions nécessaires et déterminer le(s) point(s) critique(s).
  - b) En utilisant les conditions suffisantes, déterminer la nature de(s) point(s) critiques(s).

**Exercice III** (45 min, 7 points)

On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 3x^2 + y^2 \\ \text{sous la contrainte } 2x - y = 7 \end{cases}$$

**1) Méthode de Lagrange**

- a) Étudier la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Déterminer le(s) extremum(s) de  $(P)$ .

**2) Méthode de substitution**

- a) Montrer que le problème  $(P)$  se ramène à un problème d'optimisation d'une fonction d'une variable  $h(x)$
- b) Résoudre ce problème.
- c) Qu'en déduisez-vous pour le problème  $(P)$  ?