

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1

Semestre 1

Licence Économie-Gestion – 1^{re} année

Matière : Mathématiques appliquées

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (15 min, 3 points)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- 1) Rappeler la définition d'une fonction convexe.
- 2) Expliquer la définition à l'aide d'un dessin.
- 3) Donner deux exemples de fonctions convexes.

Exercice I (30 min, 5 points)

On considère la fonction $f(x) = 8x^2 - x^4 + 3$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- 3) Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.
- 4) Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$.
- 5) Construire le tableau de variations de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f en y précisant le(s) extremum(s)
- 6) Le(s) extremum(s) de f sont-ils globaux ?

Exercice II (30 min, 5 points)

On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = x^2 + y^3 + 6xy$.

- 1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f .
- 2) Donner la hessienne de f et calculer son hessien.
- 3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de $f(x, y)$:
 - a) Donner les conditions nécessaires et déterminer le(s) point(s) critique(s).
 - b) En utilisant les conditions suffisantes, déterminer la nature de(s) point(s) critiques(s).

Exercice III (45 min, 7 points)

On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = 3x^2 + y^2 \\ \text{sous la contrainte } 2x - y = 7 \end{cases}$$

1) Méthode de Lagrange

- a) Étudier la convexité de f sur \mathbb{R}^2 .
- b) Déterminer le(s) extremum(s) de (P) .

2) Méthode de substitution

- a) Montrer que le problème (P) se ramène à un problème d'optimisation d'une fonction d'une variable $h(x)$
- b) Résoudre ce problème.
- c) Qu'en déduisez-vous pour le problème (P) ?