Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020

Session 1 **Semestre 1**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère la fonction $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$.

1) La fonction f étant un polynôme, elle est définie pour tout x, soit $D_f = \mathbb{R}$.

2) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3) On a $f'(x) = 4x^3 - 16x$ et $f''(x) = 12x^2 - 16$.

4) Les points critiques de $f(x)$ sont donnés par la condition nécessaire d'optimalité (CNO) :

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2-4) = 0 \iff 4x(x-2)(x+2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -2$$

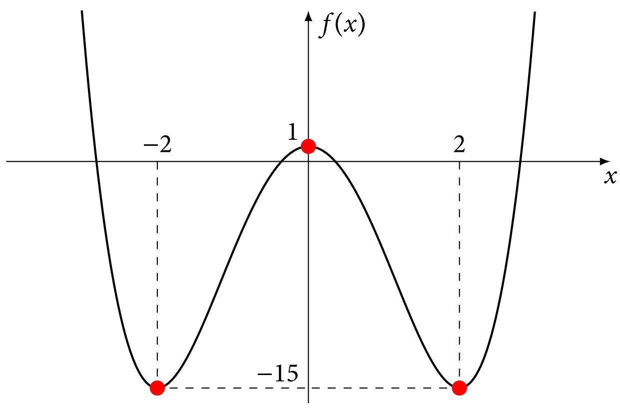
La fonction f admet donc 3 points critiques. On utilise les conditions suffisantes d'optimalité pour déterminer la nature de chaque point :

$$\begin{aligned} f''(0) = -16 < 0 &\implies f \text{ admet un maximum local en } x = 0 \\ f''(2) = 32 > 0 &\implies f \text{ admet un minimum local en } x = 2 \\ f''(-2) = 32 > 0 &\implies f \text{ admet un minimum local en } x = -2 \end{aligned}$$

5) Le tableau de variations de $f(x)$ est

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-15	$\nearrow$	1	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit l'allure du graphe de f :



6) On observe donc que f admet des minimums globaux en $x = -2$ et $x = +2$ et un maximum local en $x = 0$.

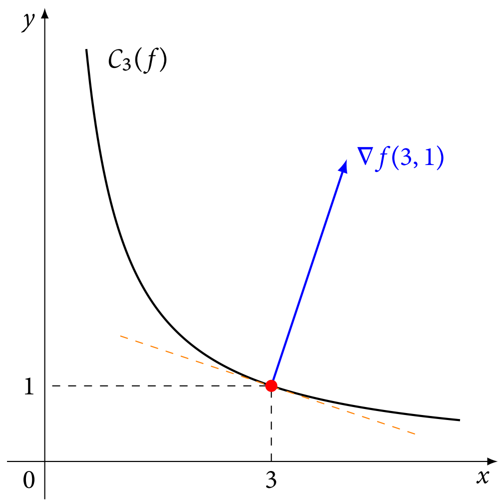
Exercice II (20 min, 4 points)
Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = xy$ pour $x > 0$ et $y > 0$.
1) On a

$$f'_x(x,y) = y \qquad f'_y(x,y) = x \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \nabla f(3,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) La courbe de niveau 3 de f est $C_3(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : f(x,y) = 3\}$. D'où

$$f(x,y) = 3 \iff xy = 3 \iff y = \frac{3}{x} \quad x > 0$$

3) Le gradient de f en $(3,1)$ correspond au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. D'où la représentation graphique :



Exercice III (55 min, 8 points)
Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x$.
1) Etude de la convexité de f
a) Les dérivés partielles de f sont

$$f'_x(x,y) = 2x - 2y - 6 \qquad f'_y(x,y) = 8y - 2x \qquad f''_{x^2}(x,y) = 2 \qquad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -2 \qquad f''_{y^2}(x,y) = 8$$

b) La hessienne et le hessien de f sont donc

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(x,y) = 2 \times 8 - (-2) \times (-2) = 12$$

c) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\det H_f(x,y) = 12 \geqslant 0$, $f''_{x^2}(x,y) = 2 \geqslant 0$, $f''_{y^2}(x,y) = 8 \geqslant 0$. Donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2) Optimisation sans contrainte
a) Pour déterminer les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ on utilise les conditions nécessaires d'optimalité :

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - 6 = 0 \\ 8y - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8y - 2y - 6 = 0 \\ x = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

La fonction f admet donc un unique point critique $(x_0, y_0) = (4,1)$.
b) Comme la fonction f est convexe, elle admet un minimum global en $(4,1)$. Ce minimum est $f(4,1) = -12$
3) Optimisation avec contrainte : on souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x,y) = f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x \\ \text{sous la contrainte } y - x = 4 \end{cases}$$

a) Le lagrangien associé à (P) est $L(x,y,\lambda) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x + \lambda(y - x - 4)$. Les points critiques de (P) sont données par les conditions nécessaires d'optimalité :

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - 6 - \lambda = 0 \\ 8y - 2x + \lambda = 0 \\ y - x - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(4y + \frac{1}{2}\lambda) - 2y - 6 - \lambda = 0 \\ x = 4y + \frac{1}{2}\lambda \\ y - x - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ \lambda = 2x - 8y = -14 \\ x = y - 4 = -3 \end{cases}$$

Le problème (P) admet donc un unique point critique $(-3,1)$ pour $\lambda = -14$.
b) Comme la fonction objectif f est convexe et la fonction contrainte $g(x,y) = y - x - 4$ est affine, le problème (P) admet un minimum global en $(-3,1)$. Ce minimum est $f(-3,1) = 37$.