

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020

1^{re} session

1^{er} semestre

Licence Économie-Gestion – 1^{re} année

Matière : Mathématiques appliquées

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Questions de cours (15 min, 3 points)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

- 1) Rappeler la définition du taux d'accroissement de f entre deux réels x_0 et x_1 .
- 2) Donner la définition de la dérivée de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.
- 3) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice I (30 min, 5 points)

On considère la fonction $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- 3) Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.
- 4) Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$.
- 5) Construire le tableau de variations de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f en y précisant le(s) extremum(s)
- 6) Le(s) extremum(s) de f sont-ils globaux?

Exercice II (20 min, 4 points)

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = xy$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

- 1) Calculer les dérivées partielles (premières) de f . En déduire le gradient de f au point $(3, 1)$.
- 2) Déterminer la courbe de niveau 3 de f . En faire une représentation graphique.
- 3) Représenter le gradient de f en $(3, 1)$ sur le graphique précédent.

Exercice III (55 min, 8 points)

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x$.

1) Etude de la convexité de f

- a) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f .
- b) Former la hessienne et calculer le hessien de f .
- c) En déduire que f est convexe sur \mathbb{R}^2 .

2) Optimisation sans contrainte

- a) Déterminer le(s) extremum(s) de f sur \mathbb{R}^2 .
- b) Préciser la nature du ou des extremums (minimum ou maximum, local ou global).

3) Optimisation avec contrainte : on souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x \\ \text{sous la contrainte } y - x = 4 \end{cases}$$

- a) Donner le lagrangien associé à (P) et déterminer le(s) point(s) critique(s).
- b) Préciser la nature du ou des extremums (minimum ou maximum, local ou global).