Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1re session — 2e semestre

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction — **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (20 min, 3 points)
Soit $f(x) = 3^x$.

1) Par définition $f(x) = 3^x = \mathrm{e}^{x \ln 3}$. D'où $f'(x) = (\ln 3)\mathrm{e}^{x\ln 3} = (\ln 3)3^x$.

2) L'élasticité de $f(x)$ en $x > 0$ est

$$e(f,x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x = \frac{(\ln 3)3^x}{3^x}x = x \ln 3$$

3) Lorsque $x = 1/2$, $e(f, 1/2) = \frac{\ln 3}{2} \approx 0.55 < 1$. Donc la fonction f est inélastique en $x = 1/2$. Lorsque x varie de 1 %, $f(x)$ varie de moins de 1 % (environ 0.55 %).
Lorsque $x = 2$, $e(x, 2) = 2 \ln 3 \approx 2.2 > 1$. La fonction f est donc élastique en $x = 1$. Lorsque x varie de 1 %, $f(x)$ varie de plus de 1 % (environ 2.2 %).

Exercice II (20 min, 4 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{x + 2y}{xy}$.

1) La fonction f est définie lorsque $xy \neq 0$, soit $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

2) Pour $\lambda > 0$ et $(x, y) \in D_f$, on a

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x) + 2(\lambda y)}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{1}{\lambda}\frac{x + 2y}{xy} = \lambda^{-1} f(x, y)$$

La fonction f est donc homogène de degré -1.

3) On a

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{2}{x} \implies f'_x(x, y) = -\frac{2}{x^2} \quad \text{et} \quad f'_y(x, y) = -\frac{1}{y^2}$$

4) On vérifie

$$x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) = -\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{2y + x}{xy} = (-1) f(x, y)$$

Exercice III (30 min, 5 points)
On sait que $(\mathrm{e}^{x^2})' = 2x\mathrm{e}^{x^2}$. D'où

$$I = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e} - 1}{2}$$

On effectue une intégration par partie en posant $v' = x$ et $u = \ln x$. D'où

$$J = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \tfrac{x^2}{2} \times \tfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \int_1^{\mathrm{e}} \tfrac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$$

On pose $t = \sqrt{x-2}$. D'où $x = t^2 + 2$ et $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. $x = 3 \implies t = 1$, $x = 6 \implies t = 2$. On obtient alors

$$K = \int_3^6 \frac{x}{\sqrt{x-2}} \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2+2}{t} \times 2t \,\mathrm{d}t = \int_1^2 2t^2 + 4 \,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}t^3 + 4t\right]_1^2 = \frac{26}{3}$$

Exercice IV (30 min, 5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) On a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 3 = -1 \neq 0$$

Donc la matrice A est inversible.

2)

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

3)

$$A^2 - 3A = I_2 \implies A(A - 3I_2) = I_2 \qquad \left.\begin{array}{r} A(A-3I_2) = I_2 \\ AA^{-1} = I_2 \end{array}\right\} \implies A^{-1} = A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4) En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, on a

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 3y = \alpha \\ x + 2y = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2\alpha + 3\beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$