ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1re session 1er semestre

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

1) La fonction $f(x)$ est définie si et seulement si $x \neq 0$. D'où $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) On a

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \implies f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \implies f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

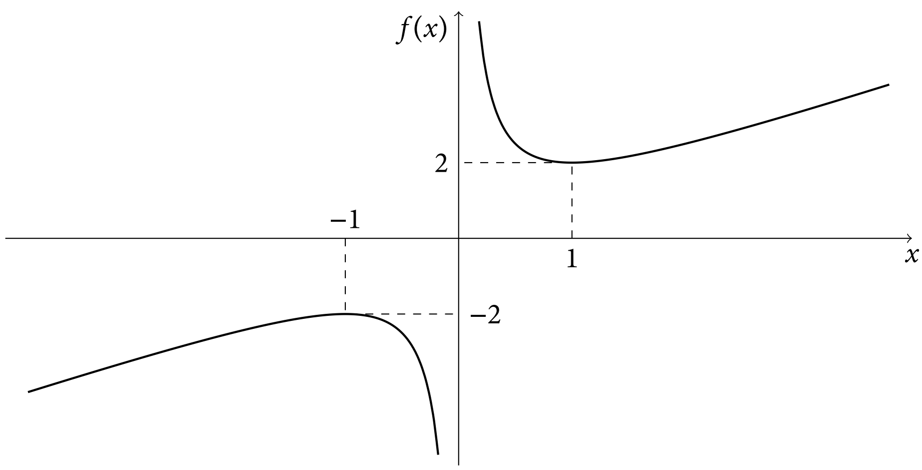
4) Pour déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$, on utilise la CNO puis les CSO :

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = +1 \qquad \begin{cases} f''(-1) = -2 < 0 & \text{maximum local} \\ f''(-1) = +2 > 0 & \text{minimum local} \end{cases}$$

La fonction f admet donc un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = +1$.

5)

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$+2$	↗	$+\infty$



6) On voit que les extrémums trouvés ne sont que locaux. Toutefois, sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction admet un maximum global en $x = -1$ et sur $]0, +\infty[$, la fonction admet un minimum global en $x = +1$.

Exercice II (30 min, 5 points)
On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{6}y^3 + 6$.

1) On a

$$f'_x(x, y) = 2x - y \quad f'_y(x, y) = -x + \frac{1}{2}y^2 \quad f''_{x^2}(x, y) = 2 \quad f''_{xy}(x, y) = -1 \quad f''_{yx}(x, y) = -1 \quad f''_{y^2} = y$$

2) La matrice hessienne de f et son hessien sont

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix} \qquad \det H_f(x, y) = 2y - 1$$

3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de $f(x, y)$:

a) Les conditions nécessaires sont :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ -x + 2x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(2x - 1) = 0 \\ y = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \text{ ou } y = 1 \end{cases}$$

La fonction f admet donc deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1/2, 1)$.

b) En $(0, 0)$, $\det H_f(0, 0) = -1 < 0$. Il s'agit donc d'un point col. Pas d'extremum en $(0, 0)$.
En $(1/2, 1)$, $\det H_f(1/2, 1) = 1 > 0$ et $f''_{x^2}(1/2, 1) = 2 > 0$. La fonction f admet donc un minimum local au point $(1/2, 1)$.

Exercice III (45 min, 7 points)
Pour $K \in \mathbb{R}$, on considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{sous la contrainte } y - 2x = K \end{cases}$$

1) Méthode de Lagrange

a) La fonction $f(x, y)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^2$ comme somme des deux fonctions convexes d'une variable : $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto y^2$.

b) Le lagrangien associé à (P) est $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - 2x - K)$. Les CNO sont alors

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2\lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ y - 2x - K = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} - 2\lambda = K \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{5}K \\ y = \frac{1}{5}K \\ \lambda = -\frac{2}{5}K \end{cases}$$

Le problème (P) possède donc un unique point candidat $(x_0, y_0) = (-\frac{2}{5}K, \frac{1}{5}K)$. Comme la fonction f est convexe et la fonction contrainte $y - 2x - K$ est affine, le problème (P) admet un minimum global en (x_0, y_0).

2) Méthode de substitution

a) Sous la contrainte $y - 2x = K$, on a $y = 2x + K$, d'où

$$f(x, y) = f(x, 2x + K) = x^2 + (2x + K)^2 = 5x^2 + 4Kx + K^2 = h(x)$$

Résoudre (P) revient alors à optimiser $h(x)$.

b) On a $h'(x) = 10x + 4K$ et $h''(x) = 10$. La CNO $h'(x) = 0$ donne $x = -4K/10 = -2K/5$. Comme la fonction h est convexe ($h''(x) = 10 \geqslant 0, \forall x$), elle admet donc un minimum global en $x_0 = -2K/5$. Il en est donc de même du problème (P) avec $y_0 = 2x_0 + K = K/5$.

3) Lorsque $K = 5$, le problème (P) possède un minimum global en $(x_0, y_0) = (-2, 1)$. Ce minimum est $f(-2, 1) = 5$.