Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1re session — 1er semestre

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées — **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Questions de cours (15 min, 3 points)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) Rappeler la définition d'une fonction convexe.

2) Expliquer la définition à l'aide d'un dessin.

3) Donner deux exemples de fonctions convexes.

Exercice I (30 min, 5 points)

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

3) Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.

4) Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$.

5) Construire le tableau de variations de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f en y précisant le(s) extremum(s)

6) Le(s) extremum(s) de f sont-ils globaux ?

Exercice II (30 min, 5 points)

On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{6}y^3 + 6$.

1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

2) Donner la matrice hessienne de f et calculer son hessien.

3) On se propose de résoudre le problème d'optimisation de $f(x, y)$:

- **a)** Donner les conditions nécessaires et déterminer le(s) point(s) critique(s).
- **b)** En utilisant les conditions suffisantes, déterminer la nature de(s) point(s) critiques(s).

Exercice III (45 min, 7 points)

Pour $K \in \mathbb{R}$, on considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{sous la contrainte } y - 2x = K \end{cases}$$

1) Méthode de Lagrange

- **a)** Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}^2$.
- **b)** Déterminer le(s) extremum(s) de (P).

2) Méthode de substitution

- **a)** Montrer que le problème (P) se ramène à un problème d'optimisation d'un fonction d'une variable $h(x)$
- **b)** Résoudre ce problème.

3) Donner la solution du problème lorsque $K = 5$.