

Licence Economie-Gestion – 2^e année

Matière : Statistiques et probabilités

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (15 min, 3 points)

Quelle doit être la taille d'un échantillon pour pouvoir estimer une proportion à 2 % près avec un niveau de confiance de 95 %. (Pour traiter cette question, vous ne pouvez pas vous contenter d'appliquer une formule, mais vous devez expliciter le modèle statistique et le raisonnement permettant d'aboutir au calcul.)

Problème

Selon l'observatoire communal de l'habitat de la ville de Limoges, le prix moyen du m² pour la vente d'une maison dans la ville de Limoges s'élevait à 1945 € en 2022 (prix moyen basé sur les 744 transactions de l'année 2022). L'écart-type est estimé à 415 €. (Source : Observatoire communal de l'habitat de la Ville de Limoges. Marché de l'année 2022)

Un site internet immobilier souhaite actualiser ces données pour le premier trimestre 2024. Pour cela, il collecte auprès de son réseau d'agences immobilières partenaires le prix du m² sur un échantillon de transactions effectuées en début d'année 2024. (Les résultats suivants sont basés sur les données du site www.meilleursagents.com)

Partie I (20 min, 3 points)

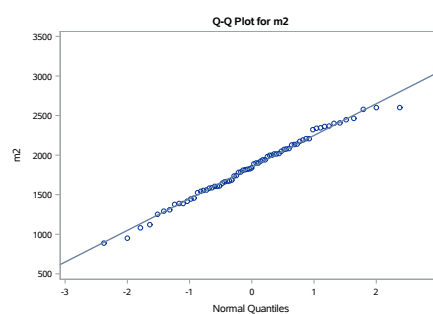
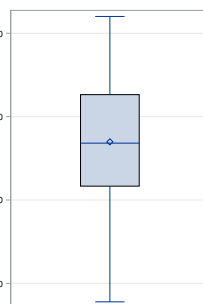
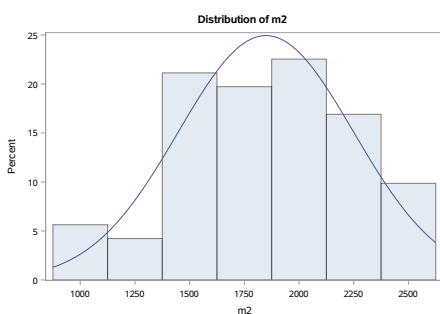
Les données (prix du m²) récoltées sur l'échantillon sont résumées dans la sortie SPSS suivante :

Descriptive Statistics						
	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic
m2	71	889	2601	1848.72	47.469	399.979
Valid N (listwise)	71					

- 1) Modéliser statistiquement la problématique (population, variable, paramètres, échantillon).
- 2) Commenter en détail la sortie SPSS ci-dessus.
- 3) Donner un intervalle de confiance à 90 % pour le prix moyen du m² pour le premier trimestre 2024.

Partie II (10 min, 2 points)

A l'aide des sorties SAS suivantes, vérifier que le prix du m² suit bien une loi normale.



Test	Statistic	p Value
Shapiro-Wilk	W	0.987287
Kolmogorov-Smirnov	D	0.049659
Cramer-von Mises	W-Sq	0.018338
Anderson-Darling	A-Sq	0.15785
	Pr < W	0.6945
	Pr > D	> 0.1500
	Pr > W-Sq	> 0.2500
	Pr > A-Sq	> 0.2500

Partie III (25 min, 4 points)

On souhaite vérifier que les variations de prix du m² sont restées stables par rapport à 2022.

- 1) Poser, en justifiant, clairement les hypothèses du test.
- 2) Construire un test à 5 % permettant de vérifier l'hypothèse ci-dessus.
- 3) Quelle est votre conclusion ? Quel risque prenez-vous ?
- 4) Commenter la sortie STATA suivante :

```
Stata. sdtest m2 == 415

One-sample test of variance
-----
Variable |      Obs      Mean   Std. err.   Std. dev.   [95% conf. interval]
-----+-----
      m2 |       71   1848.718   47.46872   399.9785   1754.045   1943.392
-----+-----
      sd = sd(m2)
H0: sd = 415
                                     c = chi2 = 65.0242
                                     Degrees of freedom = 70

      Ha: sd < 415
      Ha: sd != 415
      Ha: sd > 415
Pr(C < c) = 0.3541      2*Pr(C < c) = 0.7083      Pr(C > c) = 0.6459
```

Partie IV (30 min, 5 points)

On souhaite à présent tester si le prix moyen du m² a baissé en 2024 (par rapport à 2022).

- 1) Poser clairement les hypothèses du test puis effectuer le test en prenant un risque de 5 %.
- 2) Quelle est votre conclusion ? Quel risque prenez-vous ?
- 3) Calculer et interpréter la probabilité critique associée à ce test.
- 4) Commenter la sortie R suivante :

```
R> t.test(data$m2, mu=1945)
One Sample t-test
data: data$m2
t = -2.0283, df = 70, p-value = 0.04633
alternative hypothesis: true mean is not equal to 1945
95 percent confidence interval:
 1754.045 1943.392
sample estimates:
mean of x
 1848.718
```

Partie V (20 min, 3 points)

La sortie JAMOVI suivante précise le prix du m² des maisons de l'échantillon selon leur localisation (Centre-Ville ou Périphérie).

Descriptives							
	Localisation	N	Mean	SE	SD	Minimum	Maximum
m2	Périphérie	44	1776	62.89	417.1	950	2601
	Centre-Ville	27	1967	66.51	345.6	889	2449

- 1) Après avoir précisé le modèle statistique, commentez en détail la sortie précédente.
- 2) Les sorties JAMOVI suivantes permettent-elles d'affirmer que le prix moyen du m² des maisons de centre-ville est supérieur au prix moyen du m² des maisons de périphérie ? (Précisez la méthode et les hypothèses avant de commenter les sorties.)

Homogeneity of Variances Tests					
		F	df	df2	p
m2	Levene's	2.118	1	69	0.150
	Variance ratio	1.457	43	26	0.310

Independent Samples T-Test							
		Statistic	df	p	Effect Size		
m2	Student's t	-1.995	69.00	0.025	Cohen's d	-0.4877	

Note. H_a μ Périphérie < μ Centre-Ville

Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 0) = q \quad P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$\text{Var}(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X = k) = pq^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$
Pascal	$\text{Pascal}(r, p)$	$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$\text{Var}(X) = \lambda$

$$p \in [0, 1] \quad q = 1 - p \quad n, N, r \in \mathbb{N}^* \quad \lambda > 0$$

Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$X(\Omega) = [a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\text{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0, 1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$E(Z) = 0$	$\text{Var}(Z) = 1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0, +\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ où $Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ ind.	$E(K^2) = n$	$\text{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \frac{Z}{\sqrt{K^2/n}}$ où $\begin{cases} Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ K^2 \hookrightarrow \chi^2(n) \end{cases}$ ind.	$E(T) = 0$	$\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1, n_2)$	$F(\Omega) = [0, +\infty[$	$F = \frac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2}$ où $\begin{cases} K_1^2 \hookrightarrow \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \hookrightarrow \chi^2(n_2) \end{cases}$ ind.	$E(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2}$	$\text{Var}(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \lambda > 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$$

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0, 1) \leq z)$$

Exemple : $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1.33) = 0.9082$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantiles de la loi de Student

$$P(St(n) \leq t_\alpha) = \alpha$$

Exemple : $P(St(11) \leq 2.201) = 0.975$

n \ α	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21	12.92
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.126	0.254	0.387	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
110	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
130	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.041	1.288	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.367
140	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
150	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
200	0.126	0.254	0.386	0.525	0.676	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
300	0.126	0.254	0.386	0.525	0.675	0.843	1.038	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	3.118	3.323
500	0.126	0.253	0.386	0.525	0.675	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107	3.310
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Quantiles de la loi du Khi-deux

$$P(\chi^2(n) \leq k_\alpha^2) = \alpha$$

Exemple : $P(\chi^2(15) \leq 22.31) = 0.90$

$n \backslash \alpha$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25	0.4	0.5	0.6	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.275	0.455	0.708	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.022	1.386	1.833	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	1.869	2.366	2.946	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	2.753	3.357	4.045	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	3.655	4.351	5.132	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	4.570	5.348	6.211	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	5.493	6.346	7.283	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	6.423	7.344	8.351	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	7.357	8.343	9.414	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	8.295	9.342	10.47	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	9.237	10.34	11.53	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	10.18	11.34	12.58	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	11.13	12.34	13.64	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	12.08	13.34	14.69	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	13.03	14.34	15.73	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	13.98	15.34	16.78	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	14.94	16.34	17.82	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	15.89	17.34	18.87	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	16.85	18.34	19.91	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	17.81	19.34	20.95	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	18.77	20.34	21.99	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	19.73	21.34	23.03	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	20.69	22.34	24.07	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	21.65	23.34	25.11	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	22.62	24.34	26.14	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	23.58	25.34	27.18	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	24.54	26.34	28.21	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	25.51	27.34	29.25	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	26.48	28.34	30.28	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	27.44	29.34	31.32	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	37.13	39.34	41.62	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	46.86	49.33	51.89	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	56.62	59.33	62.13	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	66.40	69.33	72.36	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	76.19	79.33	82.57	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	85.99	89.33	92.76	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	95.81	99.33	102.9	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
110	75.55	78.46	82.87	86.79	91.47	99.67	105.6	109.3	113.1	119.6	129.4	135.5	140.9	147.4	151.9
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	115.5	119.3	123.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6
130	92.22	95.45	100.3	104.7	109.8	118.8	125.3	129.3	133.4	140.5	151.0	157.6	163.5	170.4	175.3
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	128.4	135.1	139.3	143.6	150.9	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8
150	109.1	112.7	118.0	122.7	128.3	138.0	145.0	149.3	153.8	161.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	194.3	199.3	204.4	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3
250	196.2	200.9	208.1	214.4	221.8	234.6	243.7	249.3	255.0	264.7	279.1	287.9	295.7	304.9	311.3
300	240.7	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	293.2	299.3	305.6	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8
400	330.9	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	392.2	399.3	406.5	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6
500	422.3	429.4	439.9	449.1	459.9	478.3	491.4	499.3	507.4	521.0	540.9	553.1	563.9	576.5	585.2